BERSOT FORMATION
Préparation aux concours

Le Mardi 4 Octobre 2000

CORRECTION DE L'INTERROGATION DE MATHEMATIQUES N° 1 PHARMACIE

Exercice 1 :

1/ $f'(x) = 147x^6 - 20x^4 - \frac{2}{x^2}$

2/ $f'(x) = u'.v + u.v'$

avec $u(x) = x^2 - \frac{x}{3}$ et $v(x) = \sin\frac{2x}{5}$

donc $v'(x) = \frac{2}{5}\cos\frac{2x}{5}$ et $u'(x) = 2x - \frac{1}{3}$

D'où $f'(x) = (2x - \frac{1}{3})\sin\frac{2x}{5} + (x^2 - \frac{x}{3}).\frac{2}{5}.\cos\frac{2x}{5}$

3/ Soit $u = \frac{x}{x+1}$: $f(x) = u^n$ donc $f'(x) = n.u^{n-1}.u'$

d'où $f'(x) = n.(\frac{x}{(1+x)})^n . \frac{1}{(1+x)^2}$

4/ $f'(x) = 3\sqrt{(1+x)^3} + (3x-2) . 3 . \frac{(1+x)^2}{2\sqrt{(1+x)^3}}$

$= \frac{15}{2}x.\sqrt{1+x}$

5/ $f'(x) = (x+x^{-1})(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}) + (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})(1-x^{-2})$

$= \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}) + \frac{3}{2}(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x^5}}$

Exercice 2 :

A – 1/ Soit $u = \cos x$: $du = -\sin x\, dx$

Donc $\dot{I} = -\int\frac{du}{u^5} = \frac{1}{4}u^{-4} + K$

$= \frac{1}{4\cos^4 x} + K$

2/ Intégration par parties :

$\begin{cases} u = 3x^2 + 1 \\ dv = \cos^2 x.dx \end{cases}$ donc $\begin{cases} du = 6x\,dx \\ v = \frac{1}{2}\sin 2x \end{cases}$

d'où $\dot{I} = (3x^2+1) . \frac{\sin 2x}{2} - 3\int x \sin 2x\, dx$

De même, on intègre par parties $\int x \sin 2x \, dx$, avec u = x et dv = sin2x dx, et on obtient

$\int x \, . \sin 2x \, dx = - \frac{x}{2}$ cos2x + $\frac{1}{4}$ sin2x + C

D'où $\dot{I}$ = (3x^2 - $\frac{1}{2}$) $\frac{\sin 2x}{2}$ + $\frac{3}{2}$ x cos2x + K

3/ Intégration par parties :

$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{3x} dx \end{cases}$ donc $\begin{cases} du = dx \\ v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{cases}$

d'où $\dot{I}$ = $\frac{xe^{3x}}{3}$ - $\int \frac{1}{3} e^{3x}$ dx

= $\frac{e^{3x}}{3}$ (x - $\frac{1}{3}$) + K

B – sin^{3}x = sinx . sin^{2}x
= sinx . (1 - cos^{2}x)
= sinx . (1 – cosx) .(1 + cosx)

donc $\dot{I}$ = $\int_0^{\frac{p}{2}} \sin x \, . (1 - \cos x) \, dx$

Soit u = cosx, alors du = - sinx dx

pour x = 0, u = 1 et pour x = $\frac{p}{2}$, u =0

donc $\dot{I}$ = $\int_1^0 - (1 - u) \, du$

= $\left[\frac{u^2}{2} - u \right]_1^0$

= $\frac{1}{2}$

Exercice 3 :

On remplace la seconde équation par ln xy = 0, soit x = $\frac{1}{y}$

En remplaçant dans la première équation, on a

$\frac{1}{y}$ + 4y = 5 ⇔ 4y^2 – 5y + 1 = 0

et on obtient les solutions suivantes :

$\begin{cases} y = \frac{1}{4} \\ x = 4 \end{cases}$ et $\begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

Exercice 4 :

• IPP : soit u = e^{-x} et dv = sinx dx
alors du = - e^{-x} dx et v = - cosx

donc $\dot{I}$ = - e^{-x} cosx - $\int e^{-x} \, . \cos x \, dx$

= - e^{-x} cosx - $\dot{J}$

• De même pour $\dot{J}$,on obtient

$\dot{J}$ = e^{-x} . sinx + $\dot{I}$

d'où $\begin{cases} \dot{I} + \dot{J} = - e^{-x} . \cos x \\ \dot{I} - \dot{J} = - e^{-x} . \sin x \end{cases}$

donc $\begin{cases} \dot{I} = \dfrac{-e^{-x}}{2}(\cos x + \sin x) \\ \dot{J} = \dfrac{-e^{-x}}{2}(\cos x - \sin x) \end{cases}$

Exercice 5 :

1/ On a une équation à variables séparées :

$\dfrac{dy}{\cos^2 y}$ = 5 e^{-2x} dx + $\dfrac{dx}{(2x+3)^3}$

d'où en intégrant chacun des membres :

tan y = - $\dfrac{5}{2}e^{-2x}$ - $\dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{(2x+3)^2}$ + K

2/ 2y'' – y' = 0 ⇒ 2 r^2 – r – 1 = 0

Δ = 9 donc $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-\frac{1}{2}x}$

d'où y = A e^x + B $e^{-\frac{x}{2}}$, $(A,B) \in R^2$

3/ $\dfrac{dy}{y} = K\,.\,dx$

d'où ln $\left|\dfrac{xy}{c}\right|$ = K.x, C ∈ R

ou y = C . e^{kx}

y = y_0 à x = 0, donc $y_0 = C.e^0 = C$

d'où y = $y_0 .e^{Kx}$

Exercice 6 :

- Df = R
- f '(x) = - x . e^x, donc f '(x) est du signe de – x
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

x	- ∞	0	1	+ ∞
f'(x)	+	0	-	-
f(x)	0 ↗	1	↘ 0 ↘	-∞

Exercice 7 :

1/

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = (1-2x).e^{ex-3y}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x.\partial y} = 9(1-x).e^{2x-3y}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -3(1-x).e^{ex-3y}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y.\partial x} =$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

2/ Soit les matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

- Calculer $A + B$, $A - B$, $4A + 3B$, $A.B$
- Calculer $A^+.B$, $A.B^+$ et $B^+.A^+$, A^+ et B^+ désignant les transposées de A et B.